

III. Multilineare Algebra

1. Das Tensorprodukt

Erinnerung Seien U, V, W Vektorräume über einem Körper K . Eine Abb $\beta: V \times W \rightarrow U$ heißt bilinear, wenn gilt:

- Für jedes feste $v \in V$ ist
 $\beta(v, -) \in \text{Hom}_K(W, U)$
- Für jedes feste $w \in W$ ist
 $\beta(-, w) \in \text{Hom}_K(V, U)$.

Ziel: Alternative Beschreibung durch lin. Abb!

Def Ein Tensorprodukt von V und W
 ist ein Paar (U, β) bestehend aus
 einem K -VR U und einer bilinearen
 Abb $\beta : V \times W \rightarrow U$, sodass gilt:

Für jeden weiteren K -VR U'
 und jede bilineare Abb $\beta' : V \times W \rightarrow U'$
 gibt es genau ein $f \in \text{Hom}_K(U, U')$
 mit $\beta' = f \circ \beta$

$$\begin{array}{ccc}
 V \times W & \xrightarrow{\beta} & U \\
 & \searrow \beta' & \downarrow \exists! f \\
 & & U'
 \end{array}$$

Kurz: $\text{Hom}_K(U, U') \xrightarrow{\sim} \text{Bilin}_K(V \times W, U)$
 $f \mapsto f \circ \beta$

Diese "universelle Eigenschaft" legt (U, β) bis auf eindeutigen Iso fest:

Prop Seien (U_i, β_i) für $i = 1, 2$ zwei Tensorprodukte von V und W . Dann gibt es genau einen Iso $\varphi: U_1 \xrightarrow{\sim} U_2$ mit $\beta_2 = \varphi \circ \beta_1$.

Beweis.

Univ. Eig. von (U_1, β_1) mit $U' := U_2$ & $\beta'_1 := \beta_2$:

$$\exists! \varphi \in \text{Hom}_K(U_1, U_2) \text{ mit } \beta_2 = \varphi \circ \beta_1$$

Univ. Eig. von (U_2, β_2) mit $U' := U_1$ & $\beta' := \beta_1$:

$$\exists! \psi \in \text{Hom}_K(U_2, U_1) \text{ mit } \beta_1 = \psi \circ \beta_2$$

$$\begin{aligned} \text{Eindeutigkeit in univ. Eig.} &\Rightarrow \psi \circ \varphi = \text{id}_{U_1} \\ &\varphi \circ \psi = \text{id}_{U_2} \end{aligned}$$



Satz Für je zwei K -VR V, W existiert
ein (nach der Proposition eindeutiges)
Tensorprodukt $(U, \otimes)$.

Bew. Wähle Basen $\mathcal{B} = (b_i)_{i \in I}$ von V ,
 $\mathcal{C} = (c_j)_{j \in J}$ von W .

Setze $U := \bigoplus_{(i,j) \in I \times J} K$

& $e_{ij} := (i,j)$ -ter Standardbasisvektor $\in U$

Haben bilineare Abb

$$\otimes : V \times W \longrightarrow U$$

$$\left(\sum_i \lambda_i b_i, \sum_j \mu_j c_j \right) \mapsto \sum_{(i,j)} \lambda_i \mu_j \cdot e_{ij}$$

Prüfe die universelle Eigenschaft:

Sei U' ein K -VR & $\beta': V \times W \rightarrow U'$ bilinear.

Wenn $\exists f \in \text{Hom}_K(U, U')$ mit $\beta' = f \circ \beta$,

so muß

$$f(e_{ij}) = f(\beta(b_i, c_j)) = \beta'(b_i, c_j) \quad (*)$$

sein. Umgekehrt gilt für die eindeutige

K -lineare Abb $f \in \text{Hom}_K(U, U')$ mit $(*)$

tatsächlich $\beta' = f \circ \beta$, denn:

Für $v = \sum_i \lambda_i b_i$ & $w = \sum_j \mu_j c_j$ ist

$$f(\beta(v, w)) = f\left(\sum_{(i,j)} \lambda_i \mu_j \cdot e_{ij}\right)$$

$$= \sum_{(i,j)} \lambda_i \mu_j \underbrace{f(e_{ij})}_{= \beta'(v_i, w_j) \text{ nach } (*)}$$

(da β bilinear)

$$= \beta'(v, w)$$



Bem Eine basisfreie (aber verschwendische)

alternative Konstruktion:

Betrachte $U_0 := \bigoplus_{\substack{(v,w) \\ \in V \times W}} K \ni e_{v,w}$
Standardbasisvektor

& den Untervektorraum

$$U_1 := \langle e_{\lambda v + \mu v', w} - \lambda e_{v,w} - \mu e_{v',w},$$

$$e_{v, \lambda w + \mu w'} - \lambda e_{v,w} - \mu e_{v,w'} \rangle$$

für $v, v' \in V_1, w, w' \in V_2,$

$$\lambda, \mu \in K \rangle_K$$

$$\Rightarrow U := U_0 / U_1 \text{ tut's}$$

$$\beta: V \times W \rightarrow U$$

$$(v, w) \mapsto e_{v,w} \bmod U_1$$

(Übung)

Def Wir bezeichnen das (eindeutige) Tensorprodukt von V und W mit

$$U = V \otimes_K W = V \otimes W \quad \text{wenn } K \text{ aus dem Kontext klar ist}$$

und setzen $v \otimes w := \beta(v, w) \in V \otimes W$.

Bem Aus der Konstruktion mit Basen folgt:

$$\dim_K(V \otimes W) = \dim_K(V) \cdot \dim_K(W)$$

für $\dim_K(V), \dim_K(W) < \infty$.

Bsp Die bilineare Abb

$$b: K^m \times K^n \rightarrow \text{Mat}(m \times n, K)$$

$$(v, w) \mapsto v \cdot w^t$$

induziert einen Iso

$$f: K^m \otimes K^n \xrightarrow{\sim} \text{Mat}(m \times n, K).$$

$$e_i \otimes e_j \mapsto E_{ij} = \begin{pmatrix} & 1 \\ & \uparrow \\ & j \end{pmatrix} \leftarrow i$$

Bem Im obigen Bsp ist $f(v \otimes w) = v \cdot w^t$
eine Matrix vom Rang $\text{rk}(v \cdot w^t) = 1$.

Insbesondere hat nicht jedes Element
von $K^m \otimes K^n$ die Form $v \otimes w$!

Def Ein elementarer Tensor in $V \otimes W$
ist ein Vektor der Form $v \otimes w$
mit $v \in V$ und $w \in W$.

Prop Sei $\mathcal{C} = (c_j)_{j \in J}$ eine Basis von W .

Dann hat jedes Element $u \in V \otimes W$

die Form

$$u = \sum_{j \in J} v_j \otimes c_j$$

mit eindeutigen "Koeffizienten" $v_j \in V$.

Beweis (konkret):

Sei $\mathcal{B} = (b_i)_{i \in I}$ eine Basis von V

$\Rightarrow (b_i \otimes c_j)_{(i,j)}$ ist eine Basis von $V \otimes W$

$\Rightarrow \forall u \in V \otimes W \exists \alpha_{ij} \in K:$

$$u = \sum_{i,j} \alpha_{ij} \cdot b_i \otimes c_j = \sum_j \underbrace{\left(\sum_i \alpha_{ij} \cdot b_i \right)}_{=: v_j \in V} \otimes c_j$$

Diese Zerlegung ist eindeutig:

$$\text{Seien } v_j, v'_j \in V \text{ mit } \sum_j v_j \otimes c_j = \sum_j v'_j \otimes c_j.$$

$$\text{Schreibe } v_j = \sum_i \alpha_{ij} b_i$$

$$v'_j = \sum_i \alpha'_{ij} b_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i,j} \alpha_{ij} b_i \otimes c_j = \sum_{i,j} \alpha'_{ij} b_i \otimes c_j$$

$$\Rightarrow \forall i,j : \alpha_{ij} = \alpha'_{ij}$$

$$\Rightarrow \forall j : v_j = v'_j$$



Wir haben hier unsere konkrete Konstruktion von

$V \otimes W$ mittels Basen benutzt. Es geht auch ohne:

Beweis (abstrakt): Betrachte die lineare Abb

$$g: V^J := \bigoplus_{j \in J} V \rightarrow V \otimes W$$

$$(v_j)_{j \in J} \mapsto \sum_j v_j \otimes c_j.$$

ZZ: Diese ist ein Iso.

Dazu konstruieren wir ein Inverses mithilfe der universellen Eigenschaft:

$$\beta': V \times W \rightarrow V^J$$

$$(v, \sum_j \alpha_j \cdot c_j) \mapsto (\alpha_j v)_{j \in J}$$

ist bilinear

$$\Rightarrow \exists! f \in \text{Hom}_K(V \otimes W, V^J):$$

$$\beta'(v, w) = f(v \otimes w) \text{ für alle } v, w$$

Es gilt

$$\bullet f \circ g = \text{id}_V :$$

$$f(g((v_j)_{j \in J}))$$

$$= f\left(\sum_j v_j \otimes c_j\right)$$

$$= \sum_j \underbrace{f(v_j \otimes c_j)}_{(\delta_{jk} \cdot v_j)_{k \in J}} = (v_j)_{j \in J}$$

$$\bullet g \circ f = \text{id}_{V \otimes W} : \text{ Für } w = \sum_j \alpha_j c_j \text{ ist}$$

$$g(f(v \otimes w)) = g((\alpha_j v)_{j \in J})$$

$$= \sum_j \alpha_j v \otimes c_j$$

$$= v \otimes \left(\sum_j \alpha_j c_j\right) = v \otimes w$$

$$\Rightarrow g \circ f \circ \beta = \beta \in \text{Bilin}_K(V \times W, V \otimes W)$$

$$\Rightarrow g \circ f = \text{id} \text{ nach univ. Eigenschaft}$$



2. Eigenschaften des Tensorproduktes

Lemma Für K -VR U, V, W hat man
kanonische Iso's

$$a) K \otimes V \xrightarrow{\sim} V$$

$$b) U \otimes V \xrightarrow{\sim} V \otimes U$$

$$c) (U \otimes V) \otimes W \xrightarrow{\sim} U \otimes (V \otimes W)$$

Bew. a), b) Übung.

c) Für festes $w \in W$ ist die Abb

$$U \times V \rightarrow U \otimes (V \otimes W)$$

$$(u, v) \mapsto u \otimes (v \otimes w) \quad \text{bilinear}$$

$\exists!$ lineare Abb

$$f_w: U \otimes V \rightarrow U \otimes (V \otimes W)$$

$$\text{mit } f_w(u \otimes v) = u \otimes (v \otimes w).$$

Die Abb

$$(U \otimes V) \times W \rightarrow U \otimes (V \otimes W)$$

$$(u \otimes v, w) \mapsto f_w(u \otimes v) \\ = u \otimes (v \otimes w)$$

ist bilinear

$\Rightarrow \exists!$ lineare Abb.

$$f: (U \otimes V) \otimes W \rightarrow U \otimes (V \otimes W)$$

$$\text{mit } f((u \otimes v) \otimes w) = u \otimes (v \otimes w)$$

Analog $\exists!$ lineare Abb.

$$g: U \otimes (V \otimes W) \rightarrow (U \otimes V) \otimes W$$

$$\text{mit } g(u \otimes (v \otimes w)) = (u \otimes v) \otimes w$$

Dabei gilt $g \circ f = \text{id}$ & $f \circ g = \text{id}$,

da dies auf elementaren Tensoren gilt

und diese ein ES der Tensorprodukte bilden. $\square$

Für endl viele K -VR $V_1, \dots, V_n$ schreiben wir

$$V_1 \otimes \dots \otimes V_n := V_1 \otimes (\dots (V_{n-1} \otimes V_n) \dots)$$

da die Klammern wg Assoziativität unnötig sind.

Lemma Jede multilineare Abb.

$$\mu: V_1 \times \dots \times V_n \longrightarrow U$$

faktoriisiert über genau eine lin. Abb.

$$f \in \text{Hom}_K(V_1 \otimes \dots \otimes V_n, U):$$

$$\begin{array}{ccc} V_1 \times \dots \times V_n & \xrightarrow{\mu} & U \\ & \searrow & \nearrow \exists! f \\ & V_1 \otimes \dots \otimes V_n & \end{array}$$

$$f(v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = \mu(v_1, \dots, v_n)$$

Bew. Per Induktion.



Tensoren & Dualität:

$$V^* := \text{Hom}_K(V, K)$$

Prop a) Für alle K -VR V, W $\exists$ natürliche
lin. Abb.

$$\varphi: V^* \otimes W \rightarrow \text{Hom}_K(V, W).$$

b) Für $\dim_K V < \infty$ oder $\dim_K W < \infty$
ist φ ein Isomorphismus.

Bew.

a) Betrachte die bilineare Abb

$$V^* \times W \rightarrow \text{Hom}_K(V, W)$$

$$(f, w) \mapsto (v \mapsto f(v) \cdot w)$$

b1) Sei zunächst $\dim_K W < \infty$.

Sei $(w_1, \dots, w_n)$ eine Basis von W .

Für $f \in \text{Hom}_K(V, W)$ ist

$$f(v) = \sum_i f_i(v) \cdot w_i \text{ mit eindeutigen } f_i(v) \in K.$$

Da f linear ist, ist $f_i := (v \mapsto f_i(v)) \in V^*$

Definiere $\Psi : \text{Hom}_K(V, W) \rightarrow V^* \otimes W$

$$f \mapsto \sum_i f_i \otimes w_i$$

Dann gilt:

- $\varphi \circ \Psi = \text{id}$ (per Def)
- $\Psi \circ \varphi = \text{id}$:

$$\begin{aligned} (\Psi \circ \varphi)(f \otimes w) &= \Psi(f(-) \cdot w) \\ &= \sum_i c_i \cdot f(-) \otimes w_i \end{aligned}$$

$$\text{für } w = \sum_i c_i w_i$$

$$= f(-) \otimes \sum_i c_i w_i$$

$$= f \otimes w$$

$\Rightarrow \varphi$ Iso

b2) Sei nun $\dim_K V < \infty$.

Sei $(v_1, \dots, v_m)$ eine Basis von V

& $(v_1^*, \dots, v_m^*)$ die duale Basis von V^*

$$\text{d.h. } v_i^*(v_j) = \delta_{ij}.$$

Betrachte $\psi: \text{Hom}_K(V, W) \rightarrow V^* \otimes W$

$$f \mapsto \sum_i v_i^* \otimes f(v_i).$$

Dann gilt:

- $\psi \circ \varphi = \text{id}:$

$$(\psi \circ \varphi)(f \otimes w) = \psi(f(-) \cdot w)$$

$$= \sum_i v_i^* \otimes f(v_i) \cdot w$$

$$= \underbrace{\sum_i f(v_i) \cdot v_i^*}_{= f} \otimes w$$

$$= f \text{ da } v_i \mapsto f(v_i)$$

$$= f \otimes w$$

- $\varphi \circ \psi = \text{id} :$

$$(\varphi \circ \psi)(f) = \varphi \left(\sum_i v_i^* \otimes f(v_i) \right)$$

$$= \sum_i \varphi(v_i^* \otimes f(v_i))$$

$$= (v_j \mapsto \sum_i \underbrace{v_i^*(v_j)}_{= \delta_{ij}} \cdot f(v_i))$$

$$= (v_j \mapsto f(v_j))$$

$$= f$$

$$\Rightarrow \varphi \text{ Iso.}$$



Bem Für $\dim_K V, \dim_K W = \infty$ ist

$$\varphi : V^* \otimes W \hookrightarrow \text{Hom}_K(V, W)$$

zwar injektiv, aber nicht surjektiv:

$$\text{im}(\varphi) = \{ f \in \text{Hom}_K(V, W) \mid$$

$$\dim_K(\text{im}(f)) < \infty \}$$

Bsp Für $V = W$ mit $\dim_K V < \infty$ liefert
die Proposition einen Iso

$$\varphi^{-1}: \operatorname{End}_K(V) = \operatorname{Hom}_K(V, V) \xrightarrow{\sim} V^* \otimes V.$$

Komposition mit der Auswertung

$$\operatorname{ev}: V^* \otimes V \rightarrow K, f \otimes v \mapsto f(v)$$

liefert eine lineare Abb

$$\operatorname{ev} \circ \varphi^{-1}: \operatorname{End}_K(V) \rightarrow K.$$

Dies ist die bekannte Spurabbildung:

Wähle Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V

& sei $(v_1^*, \dots, v_n^*)$ die duale Basis von V^*

Für $f \in \operatorname{End}_K(V)$ ist dann

$$M_{\mathcal{B}}(f) = (a_{ij})_{i,j} \text{ mit } a_{ij} = v_i^*(f(v_j)).$$

Die Spur dieser Abbildungsmatrix ist

$$\operatorname{tr}(f) := \operatorname{tr}(M_B(f))$$

$$:= \sum_i a_{ii}$$

$$= \sum_i v_i^*(f(v_i))$$

$$= \operatorname{ev}\left(\sum_i v_i^* \otimes f(v_i)\right)$$

$$= \operatorname{ev}(\varphi^{-1}(f))$$

wegen der Beschreibung von $\Psi = \varphi^{-1}$ im
Beweis der Proposition, Teil b2).

Übung Für endl-dimensionale VR U, V, W

$\exists$ natürlicher Iso

$$\operatorname{Hom}_K(U \otimes V, W) \cong \operatorname{Hom}_K(U, V^* \otimes W)$$

"Tensor-Hom-Adjunktion"

Tensorprodukte von Homomorphismen:

Def Seien V_i, W_i K -VR

und $f_i \in \text{Hom}_K(V_i, W_i)$ ($i=1,2$).

Die Abb.

$$\beta: V_1 \times V_2 \rightarrow W_1 \otimes W_2$$

$$(v_1, v_2) \mapsto f_1(v_1) \otimes f_2(v_2)$$

ist bilinear, also $\exists!$ lineare Abb.

$$f_1 \otimes f_2 \in \text{Hom}_K(V_1 \otimes V_2, W_1 \otimes W_2)$$

mit

$$(f_1 \otimes f_2)(v_1 \otimes v_2) = f_1(v_1) \otimes f_2(v_2).$$

Bsp Sei $\dim_K V_i, \dim_K W_i < \infty$,

$\mathcal{B}_i = (v_1^{(i)}, \dots, v_{m_i}^{(i)})$ eine Basis von V_i

$\mathcal{C}_i = (w_1^{(i)}, \dots, w_{n_i}^{(i)}) \xrightarrow{\quad \# \quad} W_i$

$\Rightarrow \mathcal{B} := (v_1^{(1)} \otimes v_1^{(2)}, \dots, v_1^{(1)} \otimes v_n^{(2)}, \dots,$

$v_m^{(1)} \otimes v_1^{(2)}, \dots, v_m^{(1)} \otimes v_n^{(2)})$

ist eine Basis von $V_1 \otimes V_2$

$\mathcal{C} := \dots \xrightarrow{\quad \# \quad} W_1 \otimes W_2$

Für $A = (a_{ij}) = M_{\mathcal{B}_1, \mathcal{C}_1}(f_1)$, $B = M_{\mathcal{B}_2, \mathcal{C}_2}(f_2)$

gilt:

$$M_{\mathcal{B}}(f \otimes g) = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1m}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mm}B \end{pmatrix}}_{=: A \otimes B}$$

"Kroneckerprodukt"

Übung Für quadrat. Matrizen

$$A \in \text{Mat}(m \times m, K)$$

$$B \in \text{Mat}(n \times n, K)$$

$$\text{gilt: } \text{tr}(A \otimes B) = \text{tr}(A) \text{tr}(B)$$

$$\det(A \otimes B) = \det(A)^m \det(B)^n$$

Bem Physiker nennen Elemente von

$$\underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_r \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_s$$

auch r -fach kovariante

und s -fach kontravariante Tensoren

oder kurz Tensoren der Stufe (r, s) .

Für $V = K^n$ transformieren sich diese

bei Koordinatenwechseln $A \in GL_n(K)$

mittels $\underbrace{A \otimes \dots \otimes A}_r \otimes \underbrace{A^t \otimes \dots \otimes A^t}_s$.

3. Symmetrische & alternierende Potenzen

Def Eine multilineare Abb

$$\mu: V^{\times n} := V \times \dots \times V \rightarrow W$$

heißt

a) symmetrisch, falls

$$\forall (v_1, \dots, v_n) \in V^{\times n} \quad \forall \sigma \in S_n:$$

$$\mu(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}) = \mu(v_1, \dots, v_n).$$

b) alternierend, falls

$$\mu(v_1, \dots, v_n) = 0,$$

sobald $\exists i \neq j$ mit $v_i = v_j$.

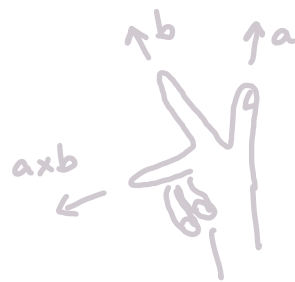
Bsp • Skalarprodukte $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ sind
symmetr. Bilinearformen (über $K = \mathbb{R}$).

- Für jede kommutative K -Algebra A
(z.B. $A = K[x]$) ist die Multiplikation
ist $A^n \rightarrow A, (a_1, \dots, a_n) \mapsto a_1 \cdots a_n$
eine symmetr. Multilinearform.

- Für $V = K^n$ ist $\det: V^n \rightarrow K$
eine alternierende Multilinearform.

- Das Vektorprodukt

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$



$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

ist eine alternierende Bilinearform über $K = \mathbb{R}$.

Lemma Sei $\mu: V^{xr} \rightarrow W$ multilinear.

a) Falls μ alternierend ist, gilt:

$$\forall (v_1, \dots, v_n) \in V^{xn} \quad \forall \sigma \in S_n:$$

$$\mu(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \mu(v_1, \dots, v_n).$$

b) Wenn $2 \neq 0$ in K ist,

gilt auch die Umkehrung.

Bew. a) Reicht, für Transpositionen $\sigma = (ij)$ zz.

$\Rightarrow$ oBdA $n=2$ (halte übrige Variablen fest)

μ alternierend

$$\Rightarrow 0 = \mu(x+y, x+y)$$

$$= \underbrace{\mu(x, x)}_{=0} + \mu(x, y) + \mu(y, x) + \underbrace{\mu(y, y)}_{=0}$$

$$\Rightarrow \mu(x, y) = -\mu(y, x).$$

b) Umgekehrt:

Sei $\mu: V^{\times n} \rightarrow W$ multilinear

mit $\mu(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \mu(v_1, \dots, v_n)$.

Falls $\exists i \neq j$ mit $v_i = v_j$,

wähle $\sigma = (ij)$

$$\Rightarrow \forall k: v_{\sigma(k)} = v_k$$

$$\Rightarrow \mu(v_1, \dots, v_n) = -\mu(v_1, \dots, v_n)$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \mu(v_1, \dots, v_n) = 0$$

$$\Rightarrow \mu(v_1, \dots, v_n) = 0, \text{ da } 2 \in K^*$$



Bem Für $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist $\mu: K \times K \rightarrow K, (a,b) \mapsto ab$
nicht alternierend, denn $\mu(1,1) \neq 0$.

Aber $\mu(x,y) = \mu(y,x) = -\mu(y,x) \dots$

Wir hatten multilineare Abb. durch lineare Abb.
von Tensorprodukten beschrieben. Analog dazu:

Def Sei V ein K -VR.

a) Die n -te symmetrische Potenz von V

ist ein Paar $(\text{Sym}^n(V), \mu)$

aus einem K -VR $\text{Sym}^n(V)$

& einer symmetr. multilinearen Abb.

$\mu: V^{\times n} \rightarrow \text{Sym}^n(V)$, sodass

gilt: Für jeden K -VR W & jede

symm. multilin. Abb. $\nu: V^{\times n} \rightarrow W$

$\exists! f \in \text{Hom}_K(\text{Sym}^n(V), W):$

$$\nu = f \circ \mu.$$

b) Die n -te alternierende Potenz von K

ist ein Paar $(\text{Alt}^n(V), \mu)$

aus einem K -VR $\text{Alt}^n(V)$

& einer alternierenden multilinear Abb.

$\mu: V^{xn} \rightarrow \text{Alt}^n(V)$, sodass

gilt: Für jeden K -VR W & jede

symm. altern. Abb. $\nu: V^{xn} \rightarrow W$

$\exists! f \in \text{Hom}_K(\text{Alt}^n(V), W):$

$$\nu = f \circ \mu.$$

Alternative Notationen:

$$S^n V := \text{Sym}^n V$$

$$\wedge^n V := \text{Alt}^n V$$

Satz Sei V ein K -VR und $n \in \mathbb{N}$.

Dann $\exists$ bis auf kanonischen Iso
genau eine n -te symm / alt Potenz
 $(S^n V, \mu)$ bzw. $(\Lambda^n V, \nu)$.

Beweis. Eindeutigkeit folgt aus der univ. Eigenschaft
wie für Tensorprodukte.

Existenz von $(S^n V, \mu)$:

In $V^{\otimes n} := V \otimes \dots \otimes V$ betrachte den UnterVR

$$U_+ := \left\langle v_1 \otimes \dots \otimes v_n - v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(n)} \mid \begin{array}{l} v_1, \dots, v_n \in V \\ \sigma \in S_n \end{array} \right\rangle_K$$

Setze $S^n V := V^{\otimes n} / U_+$

$$\& \quad \mu: V^{\times n} \xrightarrow[\text{Tensorprodukt}]{\otimes} V^{\otimes n} \xrightarrow[\text{Quotientenabb}]{\text{quot}} V^{\otimes n} / U_+ = S^n V$$

μ ist multilinear (da $\otimes$ multilinear & quot linear)

und symmetrisch: Für $\sigma \in S_n$ ist

$$\begin{aligned}\mu(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}) &= v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(n)} \bmod U_+ \\ &= v_1 \otimes \dots \otimes v_n \bmod U_+ \\ &= \mu(v_1, \dots, v_n).\end{aligned}$$

Für jede andere multilin. symm. $\tilde{\mu}: V^{\times n} \rightarrow W$

betrachte

$$\begin{array}{ccc} V^{\times n} & \xrightarrow{\tilde{\mu}} & W \\ \downarrow & \nearrow \exists! g, \text{ da } v \text{ multilinear} & \\ V^{\otimes n} & & \end{array}$$

$$\tilde{\mu} \text{ symmetrisch} \Rightarrow \ker g \supseteq U_+$$

$$\begin{array}{ccc} \Rightarrow V^{\otimes n} & \xrightarrow{g} & W \\ \downarrow & \nearrow \exists! f & \\ V^{\otimes n} / U_+ & & \\ =: S^n V & & \end{array}$$

$$\Rightarrow (S^n V, \mu) \text{ hat die univ. Eigenschaft.}$$

Existenz von $(\wedge^n V, \wedge)$:

Analog mit $\wedge^n V := V^{\otimes n} / U_-$

$$U_- := \langle v_1 \otimes \dots \otimes v_n \mid \begin{array}{l} v_1, \dots, v_n \in V \\ \exists i \neq j: v_i = v_j \end{array} \rangle_K \quad \square$$

Notation: Für $v_1, \dots, v_n \in V$ setzen wir

- $v_1 \dots v_n := \mu(v_1, \dots, v_n) \in S^n V$
- $v_1 \wedge \dots \wedge v_n := \nu(v_1, \dots, v_n) \in \wedge^n V$

Wir wollen als nächstes Basen von $S^n V$ & $\wedge^n V$ finden. Dazu charakterisieren wir zunächst symm/alt. multilineare Abb. durch ihre Werte auf Basistupeln:

Lemma Sei $\mu: V^x \rightarrow W$ multilinear
& sei $(b_1, \dots, b_d)$ eine Basis von V .

a) μ symm $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_n \leq d \quad \forall \sigma \in S_n: \\ \mu(b_{\sigma(i_1)}, \dots, b_{\sigma(i_n)}) = \mu(b_{i_1}, \dots, b_{i_n}) \end{array} \right.$

b) μ alt $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bullet \forall 1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq d \quad \forall \sigma \in S_n: \\ \mu(b_{\sigma(i_1)}, \dots, b_{\sigma(i_n)}) = \text{sgn}(\sigma) \cdot \mu(b_{i_1}, \dots, b_{i_n}) \\ \bullet \mu(b_{j_1}, \dots, b_{j_d}) = 0 \text{ falls } \exists \alpha \neq \beta: j_\alpha = j_\beta \end{array} \right.$

(nötig falls $2=0$ in K)

Bew. " $\Rightarrow$ " klar

" $\Leftarrow$ ":

a) Seien $v_j = \sum_i \lambda_{ij} b_i \quad (j=1, \dots, n)$

$$\Rightarrow \mu(v_1, \dots, v_n)$$

$$= \sum_{i_1, \dots, i_n} \lambda_{i_1, 1} \cdots \lambda_{i_n, n} \cdot \underbrace{\mu(b_{i_1}, \dots, b_{i_n})}_{= \mu(b_{i_{\sigma(1)}}, \dots, b_{i_{\sigma(n)}})}$$

nach Voraussetzung

Umordnen der
Vorfaktoren

$$= \sum_{i_1, \dots, i_n} \lambda_{i_{\sigma(1)}, \sigma(1)} \cdots \lambda_{i_{\sigma(n)}, \sigma(n)} \cdot \mu(b_{i_{\sigma(1)}}, \dots, b_{i_{\sigma(n)}})$$

Umbenennen $j_v := i_{\sigma(v)}$

$$= \sum_{j_1, \dots, j_n} \lambda_{j_1, \sigma(1)} \cdots \lambda_{j_n, \sigma(n)} \cdot \mu(b_{j_1}, \dots, b_{j_n})$$

$$= \mu(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}).$$

$$b) \quad \mathbb{Z}\mathbb{Z} : \mu(v_1, \dots, v_n) = 0 \text{ falls } \exists \alpha \neq \beta : v_\alpha = v_\beta$$

OBdA $\alpha = 1, \beta = 2$ (zur Vereinfachung der Notation)

$$\text{Sei } v_j = \sum_i \lambda_{ij} b_i \text{ wie oben, mit } \lambda_{i1} = \lambda_{i2} =: \lambda_i.$$

$$\Rightarrow \mu(v_1, \dots, v_n)$$

$$= \sum_{i_1, \dots, i_n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \lambda_{i_3} \dots \lambda_{i_n} \cdot \underbrace{\mu(b_{i_1}, \dots, b_{i_n})}_{= 0 \text{ f\"ur } i_1 = i_2 \text{ nach Annahme}}$$

$$= \sum_{i_1 < i_2} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \lambda_{i_3} \dots \lambda_{i_n} \cdot (\underbrace{\mu(b_{i_1}, b_{i_2}, \dots) + \mu(b_{i_2}, b_{i_1}, \dots)}_{= 0 \text{ nach Annahme}})$$

$$= 0$$



Satz Sei $(b_1, \dots, b_d)$ eine Basis von V .

a) $S^n V$ hat eine Basis bestehend aus den Vektoren $b_{i_1} \cdots b_{i_n}$ mit $I = (1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_n \leq d)$.

b) $\wedge^n V$ hat eine Basis bestehend aus den Vektoren $b_{i_1} \wedge \dots \wedge b_{i_n}$ mit $I = (1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq d)$.

c) Insbesondere ist

$$\dim S^n V = \binom{n+d-1}{n},$$

$$\dim \wedge^n V = \binom{d}{n}.$$

Bew.

a) Setze $\tilde{S}^n V := \bigoplus_I K \cdot e_I$ ↖ Standardbasisvektor

↪ $I = (1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_n \leq d)$

Betrachte die multilineare Abb.

$$\tilde{\mu} : V^{x_n} \rightarrow \tilde{S}^n V$$

mit $(b_{j_1}, \dots, b_{j_n}) \mapsto e_I$

für $I :=$ monoton wachsende
Umordnung von $j_1, \dots, j_n$

Lemma $\Rightarrow \tilde{\mu}$ symmetrisch

$$\begin{array}{ccc} \Rightarrow V^{x_n} & \xrightarrow{\tilde{\mu}} & \tilde{S}^n V \\ & \searrow & \uparrow \exists! f \\ & S^n V & \end{array}$$

Umgekehrt $\exists$ lin. Abb. $g : \tilde{S}^n V \rightarrow S^n V$
 $e_I \mapsto b_{i_1} \dots b_{i_n}$

Per Konstruktion ist $g \circ f = \text{id}$ & $f \circ g = \text{id}$

$$\Rightarrow \tilde{S}^n V \xrightarrow{\sim} S^n V$$

b) Analog mit $\tilde{\Lambda}^n V := \bigoplus_I K \cdot e_I$

$$\hookrightarrow I = (1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq d)$$

und $\tilde{v} : V^{\times n} \rightarrow \tilde{\Lambda}^n V$

$$(b_{j_1}, \dots, b_{j_n}) \mapsto \begin{cases} e_I & \text{falls } j_1, \dots, j_n \text{ paarw.} \\ & \text{verschieden mit} \\ & \text{monotoner Umordnung } I, \\ 0 & \text{falls } \exists \alpha \neq \beta : j_\alpha = j_\beta \end{cases}$$

Lemma $\Rightarrow \tilde{v}$ alternierend $\Rightarrow \tilde{\Lambda}^n V \xrightarrow{\sim} \Lambda^n V$
wie oben

c) $\# \{(1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_n \leq d)\} \simeq \{n\text{-elementige Teilmengen von } \{1, \dots, d+n-1\}\}$

via $(i_1, \dots, i_n) \mapsto (i_1, i_2+1, i_3+2, \dots)$.



4. Die symmetrische & äußere Algebra

Bsp $\dim V = 2$

Wähle Basis (x, y) von V

$$\Rightarrow S^1 V = V = Kx \oplus Ky$$

$$S^2 V = Kx^2 \oplus Kxy \oplus Ky^2$$

$$S^3 V = Kx^3 \oplus Kx^2y \oplus Kxy^2 \oplus Ky^3$$

$\vdots$

$$S^n V \simeq \{ \text{hom. Polyn. von Grad } n \text{ in } x, y \}$$

Allgemein:

Def Die symmetrische Algebra eines K -VR V

ist

$$S^\bullet V := \bigoplus_{n \geq 0} S^n V$$

wobei wir formal $S^0 V := K$ setzen.

Prop a) Für alle $a, b \in \mathbb{N}_0$

$\exists$ natürliche bilineare Abb

$$\cdot : S^a V \times S^b V \rightarrow S^{a+b} V$$

$$(v_1 \dots v_a, w_1 \dots w_b) \mapsto v_1 \dots v_a w_1 \dots w_b.$$

b) Mit der so erhaltenen Multiplikation

$$\cdot : S^\bullet V \times S^\bullet V \rightarrow S^\bullet V$$

ist $S^\bullet V$ eine kommutative K -Algebra.

c) Für $\dim_K V = d < \infty$ ist diese

isomorph zum Polynomring in d Variablen:

$$S^\bullet V \cong K[x_1, \dots, x_d]$$

$\uparrow$
Isomorphismus von K -Algebren

Beweis: Übungsaufgabe.



Alternierende Potenzen verhalten sich anders:

Bsp $\dim V = 3$

Wähle Basis (u, v, w) von V

$$\Rightarrow \wedge^1 V = V = Ku \oplus Kv \oplus Kw$$

$$\wedge^2 V = Ku \wedge v \oplus Ku \wedge w \oplus Kv \wedge w$$

$$\wedge^3 V = Ku \wedge v \wedge w$$

$$\wedge^n V = 0 \text{ für alle } n \geq 4.$$

Allgemein:

- Für $n > d = \dim V$ ist $\wedge^n V = 0$
- Für $n = d$ ist $\dim \wedge^d V = 1$.

$$\Rightarrow \dim_K \operatorname{Hom}_K(\wedge^d V, K) = 1$$

$\Rightarrow$ Bis auf Multiplikation mit einem Skalar

$\exists!$ Determinantenfkt. $f: V^{\times d} \rightarrow K$.

$\nwarrow \wedge^d V \xrightarrow{\exists!}$

Für $V = K^d$ erhalten wir erneut:

$\exists!$ alternierende multilineare Abb

$$\det: V^{\times d} \rightarrow K$$

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_d \mapsto \det \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_d \\ | & & | \end{pmatrix} \quad \text{mit } \det(\mathbb{1}) = 1.$$

Diese induziert einen Iso

$$\det: \wedge^d V \xrightarrow{\sim} K.$$

Def Die äußere Algebra eines K -VR V
(auch Graßmann-Algebra von V genannt)

ist

$$\wedge^\bullet V := \bigoplus_{n \geq 0} \wedge^n V$$

wobei wir formal $\wedge^0 V := K$ setzen.

Prop a) Für alle $a, b \in \mathbb{N}_0$

$\exists$ natürliche bilineare Abb

$$\wedge : \wedge^a V \times \wedge^b V \rightarrow \wedge^{a+b} V$$

$$(v_1 \wedge \dots \wedge v_a) \wedge (w_1 \wedge \dots \wedge w_b)$$

$$:= v_1 \wedge \dots \wedge v_a \wedge w_1 \wedge \dots \wedge w_b$$

b) Mit der so erhaltenen Multiplikation

$$\wedge : \wedge^\bullet V \times \wedge^\bullet V \rightarrow \wedge^\bullet V$$

ist $\wedge^\bullet V$ eine K -Algebra.

c) Für $\dim_K V = d < \infty$ ist

$$\dim_K \wedge^\bullet V = 2^d.$$

Beweis: Übungsaufgabe. Für c) nutze

$$\dim \wedge^\bullet V = \sum_{n \geq 0} \dim \wedge^n V = \sum_{n \geq 0} \binom{d}{n} = 2^d$$



Bem. Für $x \in \wedge^a V$, $y \in \wedge^b V$ gilt

$$x \wedge y = (-1)^{ab} \cdot y \wedge x.$$

Beweis. Per Bilinearität oBdA $x = v_1 \wedge \dots \wedge v_a$

$$y = w_1 \wedge \dots \wedge w_b$$

mit $v_i, w_j \in V$

Dann ist

$$x \wedge y = (v_1 \wedge \dots \wedge v_a) \wedge (w_1 \wedge \dots \wedge w_b)$$

$$= v_1 \wedge \dots \wedge v_a \wedge w_1 \wedge \dots \wedge w_b$$

$$= (-1)^a \cdot w_1 \wedge v_1 \wedge \dots \wedge v_a \wedge w_2 \wedge \dots \wedge w_b$$

$$= (-1)^{2a} \cdot w_1 \wedge w_2 \wedge v_1 \wedge \dots \wedge v_a \wedge w_3 \wedge \dots \wedge w_b$$

$\vdots$

$$= (-1)^{ba} \cdot \underbrace{w_1 \wedge \dots \wedge w_b}_y \wedge \underbrace{v_1 \wedge \dots \wedge v_a}_x$$



$\Rightarrow$ Für $\dim V > 1$ ist $\wedge^* V$ nicht kommutativ!

Bem. Ein $u \in \wedge^n V$ heißt zerlegbar,

wenn $v_1, \dots, v_n \in V$ existieren

mit $u = v_1 \wedge \dots \wedge v_n$.

In diesem Fall gilt $u \wedge u = 0$.

Für nicht-zerlegbare Vektoren muß

dies nicht gelten: Z.B. ist

$$(x \wedge y + z \wedge w) \wedge (x \wedge y + z \wedge w)$$

$$= \underbrace{x \wedge y \wedge x \wedge y}_{=0} + x \wedge y \wedge z \wedge w$$

$$+ z \wedge w \wedge x \wedge y + \underbrace{z \wedge w \wedge z \wedge w}_{=0}$$

$$= 2 x \wedge y \wedge z \wedge w \quad (\neq 0 \text{ im Allgemeinen})$$

Übung Für $u \in \wedge^2 V$ gilt genauer:

$$u \text{ zerlegbar} \iff u \wedge u = 0$$

(für $u \in \wedge^n V$ mit $n > 2$ ist Zerlegbarkeit

im Allg. schwieriger zu prüfen)

5. Anwendungen: Unterräume & Determinanten

Zerlegbare Vektoren in $\wedge^n V$ kann man nutzen,
um n -dim. Untervektorräume $U \subseteq V$ zu
beschreiben:

Prop a) $v_1, \dots, v_n \in V$ sind linear unabhängig
genau für $u := v_1 \wedge \dots \wedge v_n \neq 0$.

b) Ist dies der Fall, so ist ihr Aufspann

$$\langle v_1, \dots, v_n \rangle_K = \{ v \in V \mid u \wedge v = 0 \}$$

Bew. a) $v_1, \dots, v_n$ linear abhängig

$$\Rightarrow \exists i_0 : v_{i_0} = \sum_{i \neq i_0} \alpha_i v_i$$

$$\Rightarrow v_1 \wedge \dots \wedge v_n = \sum_{i \neq i_0} \alpha_i \underbrace{v_1 \wedge \dots \wedge v_i \wedge \dots \wedge v_i \wedge \dots \wedge v_n}_{=0}$$

$\begin{matrix} i & i_0 \\ \swarrow & \searrow \\ & \end{matrix}$

Umgekehrt: $v_1, \dots, v_n$ lin. unabh.

$\Rightarrow$ Teil einer Basis $v_1, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, v_d$ von V

$\Rightarrow v_1 \wedge \dots \wedge v_n$ ist Teil einer Basis von $\wedge^n V$

$\Rightarrow v_1 \wedge \dots \wedge v_n \neq 0$

b) Für $v \in V$ gilt:

$v \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle_K \Leftrightarrow v_1, \dots, v_n, v$
linear abh.

$\Leftrightarrow v_1 \wedge \dots \wedge v_n \wedge v = 0$
a) $\swarrow$
dh $u \wedge v = 0$



Satz Für linear unabhängige Systeme
 $(v_1, \dots, v_n)$ und $(w_1, \dots, w_n)$ in V
sind äquivalent:

$$a) \langle v_1, \dots, v_n \rangle_K = \langle w_1, \dots, w_n \rangle_K$$

$$b) \exists \lambda \in K^*:$$

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_n = \lambda \cdot w_1 \wedge \dots \wedge w_n.$$

Bew. Wenn b) gilt, ist für $v \in V$:

$$v \wedge v_1 \wedge \dots \wedge v_n = 0 \iff v \wedge w_1 \wedge \dots \wedge w_n = 0$$

Nach der Proposition gilt dann a).

Wenn a) gilt, $\exists A = (a_{ij}) \in GL_n(K)$:

$$v_i = \sum_j a_{ij} \cdot w_j$$

Dann folgt

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_n = \sum_{j_1, \dots, j_n} a_{1j_1} \dots a_{nj_n} \cdot \underbrace{\omega_{j_1} \wedge \dots \wedge \omega_{j_n}}_{\in K \cdot \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n}$$

$$\Rightarrow \exists \lambda \in K : v_1 \wedge \dots \wedge v_n = \lambda \cdot \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n$$

Dabei muß $\lambda \neq 0$ sein, da $v_1 \wedge \dots \wedge v_n \neq 0$ □

Äußere Potenzen sind funktoriell:

Lemma a) Für $f \in \text{Hom}_K(V, W)$

$$\exists! \wedge^n(f) \in \text{Hom}_K(\wedge^n V, \wedge^n W):$$

$$\wedge^n(f)(v_1 \wedge \dots \wedge v_n) = f(v_1) \wedge \dots \wedge f(v_n).$$

b) Für $g \in \text{Hom}_K(U, V)$ ist

$$\wedge^n(f \circ g) = \wedge^n(f) \circ \wedge^n(g).$$

Bew. a) $V^{x_n} \longrightarrow W^{x_n} \longrightarrow \wedge^n W$



$$(v_1, \dots, v_n) \mapsto f(v_1) \wedge \dots \wedge f(v_n)$$

ist alternierende multilineare Abb.

b) klar per Konstruktion. □

Spezialfall: $W = V$ & $n = \dim_K V < \infty$

$$\wedge^n(f) \in \text{End}_K(\underbrace{\wedge^n V}_{\dim=1}) = K$$

↑ kanonisch!

$\lambda \cdot \text{id} \longleftarrow \lambda$

$$\Rightarrow \exists! \lambda_f \in K : \wedge^n(f) = \lambda_f \cdot f$$

Satz $\lambda_f = \det(M_B(f))$

für jede Basis B von V .

($\Rightarrow$ basisunabhängige Def von $\det$)

Beweis. Sei $B = (b_1, \dots, b_n)$

$$\Rightarrow b_1 \wedge \dots \wedge b_n \neq 0 \text{ in } \wedge^n V$$

$$\Rightarrow \underbrace{f(b_1) \wedge \dots \wedge f(b_n)}_{\text{multilinear \& alternierend}}$$

in $f(b_1), \dots, f(b_n)$

(den Spalten von $M_B(f)$)

& für $f = \text{id}$ ist $\lambda_{\text{id}} = 1$

$$\Rightarrow \lambda_f = \det(M_B(f))$$



Korollar a) $\det(f) := \det(M_B(f))$

ist unabhängig von der Basis B .

b) Für $f, g \in \text{End}_K(V)$ ist

$$\det(g \circ f) = \det(g) \det(f).$$

5. Äußere Potenzen & Dualität:

Sei V ein K -VR mit $d = \dim V < \infty$.

$$\begin{aligned}\Rightarrow \dim \wedge^n V &= \binom{d}{n} \\ &= \binom{d}{n-d} = \dim \wedge^{n-d} V\end{aligned}$$

Bsp $V = \mathbb{R}^3$ über $K = \mathbb{R}$

Die lineare Abb

$$\begin{aligned}\varphi: \wedge^2 V &\xrightarrow{\sim} V^* \\ u \wedge v &\mapsto (w \mapsto \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u & v & w \end{pmatrix})\end{aligned}$$

ist ein Iso, weil $\ker \varphi = 0$. Explizit:

$$\begin{aligned}\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u & v & w \end{pmatrix} &= (u_2 v_3 - u_3 v_2) \cdot w_1 + \dots \\ &= \langle u \times v, w \rangle\end{aligned}$$



$\Rightarrow$ Mittels $V^* \xrightarrow{\sim} V$, $x \mapsto \langle x, - \rangle$ wird φ

zu $x: \wedge^2 V \xrightarrow{\sim} V$, $u \wedge v \mapsto u \times v$

... wir haben das Vektorprodukt wiederentdeckt!

Satz Sei V ein K -VR mit $d = \dim V < \infty$.

Nach Wahl eines Iso's $f: \Lambda^d V \xrightarrow{\sim} K$

erhalten wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Iso

$$\varphi: \Lambda^n V \xrightarrow{\sim} (\Lambda^{d-n} V)^*$$

$$u \mapsto (w \mapsto f(u \wedge w)).$$

Bew. Aus Dimensionsgründen genügt es zu zeigen,

dass φ injektiv ist. Sei also $u \in \ker(\varphi)$.

$$\Rightarrow \forall w \in \Lambda^{d-n} V : f(u \wedge w) = 0$$

$$\text{d.h. } u \wedge w = 0$$

Sei $b_1, \dots, b_d$ eine Basis von V

$$\& u = \sum_{i_1 < \dots < i_n} \alpha_{i_1, \dots, i_n} \cdot b_{i_1} \wedge \dots \wedge b_{i_n}$$

Sei $\text{vol} := b_1 \wedge \dots \wedge b_n (\neq 0 \text{ in } \wedge^d V)$.

Für $w := b_{j_1} \wedge \dots \wedge b_{j_{d-n}}$ gilt:

$$(b_{i_1} \wedge \dots \wedge b_{i_n}) \wedge w = \begin{cases} \pm \text{vol} \\ 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{falls } \{i_1, \dots, i_n\} = \{1, \dots, d\} \setminus \{j_1, \dots, j_n\} \\ \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow u \wedge w = \pm a_{i_1, \dots, i_n} \cdot \text{vol}$$

$$\text{für } \{i_1, \dots, i_n\} = \{1, \dots, d\} \setminus \{j_1, \dots, j_n\}$$

$$\Rightarrow u \wedge w = 0 \text{ für alle } w$$

$$\text{impliziert } a_{i_1, \dots, i_n} = 0 \text{ für alle } i_1, \dots, i_n,$$

$$\text{also } u = 0$$

$$\Rightarrow \ker \varphi = 0$$

